

Definirea dimensiunii generalizate în analiza sistemelor complexe

George Mahalu, Cornel Turcu, Valentin Popa

Abstract—The generalized dimension is a new notion that appeared about the fractal forms. The Hausdorff dimension has been defined into the beginning 20-th century and was one from the novelty entities from the modern geometry named fractal geometry. This dimension was been implied into many interesting area of applications such as medicine, biology, physics, engineering etc. Calculus for this is very important in study of the natural complex systems, there where the classical mathematical concepts proved limitary in the phenomena description.

Index Terms—fractal, chaos, dimension, geometry, complexity

I. INTRODUCERE

FRACTALII au pătruns practic în orice domeniu de interes al cunoașterii umane, devenind, de la un simplu subiect de reflecție, o temă de interes atât pentru neinițiai cât mai ales pentru specialiști. De la analiza fenomenului climatic și până la modelarea fenomenului canceros, de la descrierea imaginilor captate de telescopul Hubble și până la realizarea efectelor speciale în cinematografie, fractalii s-au dovedit o inepuizabilă sursă de idei, soluții, încercări, algoritmi, pe direcții și sensuri clasice sau surprinzător de neconvenționale.

Abordarea studiului țesuturilor canceroase prin tehnici de analiză fractală s-a dovedit una din temele de succes ale modelării sistemice. Diagnoza medicală s-a îmbunătățit astfel cu o nouă valență în interpretarea informațională a imaginilor de țesuturi maligne, reducând proporțional necesitățile de prelevare de țesut prin procedee ce recur la biopsie.

O serie de caracteristici fractale (cum ar fi *legea puterii*, specifică spectrului Fourier al imaginilor în scală de gri) au fost utilizate de Heymans și colaboratorii (O. Heymans, S. Blacher, F. Brouers, G.E. Pierard). Și aici, dimensiunea fractală cuantifică nivelul aleator al distribuției vasculare, caracteristică ce nu este ușor de pus în evidență prin intermediul densității vasculare.

Deoarece determinarea dimensiunii fractale constituie un element esențial în studiul caracteristicilor morfo-funcționale și a comportamentului sistemic al țesuturilor canceroase, o analiză a posibilităților de ridicare a acesteia dintr-o imagine grafică se dovedește utilă. Căutarea de noi metode de definire a dimensiunii generalizate pentru sistemele grafice complexe,

capătă astfel conotații de corelație intersistemică, la nivelul percepției proprietăților fizice ale entităților studiate prin

intermediul modelelor de reprezentare matematică.

II. DIMENSIUNEA FRACTALĂ

Există mai multe metode de a defini și calcula dimensiunea fractală a unui obiect grafic, pe care îl vom denumi în continuare *formă*.

Oricare ar fi definirea noțiunii de *dimensiune a unei forme fractale*, ideile pleacă de la dimensiunea Hausdorff-Besicovich (HB). Această dimensiune este un număr real ce poate fi utilizat în caracterizarea complexității geometrice a unei submulțimi limitate din \mathbf{R}^n .

Dimensiunea HB prezintă o semnificație mult mai subtilă decât dimensiunea fractală. Unul din motivele importanței acestei noțiuni este cel al permiterii comparării diverselor "mărimi" ale mulțimilor pentru care dimensiunea fractală este aceeași.

Pentru înțelegerea modului de definire a dimensiunii HB, să considerăm spațiul metric (\mathbf{R}^n, d) . Aici, n este număr natural iar d notează metrica euclidiană. Fie $A \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu limitat. Atunci, putem utiliza notația:

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\} \quad (1)$$

Fie $0 < \varepsilon < \infty$ și $0 \leq p < \infty$. Vom nota cu \mathcal{Q} mulțimea ansamblului de submulțimi $A_i \subset A$ astfel încât $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. În aceste condiții, putem defini:

$$\begin{aligned} M(A, p, \varepsilon) &= \\ &= \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(A_i))^p : \{A_i\} \in \mathcal{Q} \wedge \text{diam}(A_i) < \varepsilon \right\} \end{aligned} \quad (2)$$

Vom utiliza convenția ca $(\text{diam}(A_i))^0 = 0$ atunci când A_i este mulțimea vidă.

Constatăm că $M(A, p, \varepsilon)$ este un număr cuprins în intervalul $[0, \infty)$, având valoare nulă, finită sau infinită.

Pentru $p \in [0, \infty)$, mărimea:

$$M(A, p) = \sup\{M(A, p, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$$

este numită *măsura Hausdorff p-dimensională a lui A* sau simplu *dimensiune Hausdorff*.

Se observă că dimensiunea Hausdorff are un caracter de generalitate în comparație cu dimensiunea euclidiană, putând căpăta – spre deosebire de cealaltă - și valori fracționare. Din acest motiv, putem considera că ea fundează o clasă specială numită *clasa dimensiunilor generalizate*. Menționăm că dimensiunea Hausdorff așa cum a fost ea definită mai sus, nu constituie singurul exemplu de apartenență la această clasă. Orice alt exemplu de dimensiune fractală aparține de asemenea acestei clase.

Tehnica de definire a dimensiunii Hausdorff este cea de acoperire a domeniului A cu un set de subdomenii $A_i, i \in \mathbf{N}$. Această tehnică permite să realizăm un raționament de deducere a dimensiunii fractale a formelor (obiectelor geometrice) autosimilare. Pentru aceasta să considerăm o formă cu magnitudinea liniară (după toate direcțiile spațiului euclidian) egală cu unitatea, căreia îi reducem această magnitudine la valoarea $q < 1$ după fiecare direcție spațială. În felul acesta, dacă forma inițială este autosimilară, se obține o acoperire a acesteia cu $N(q)$ forme autosimilare (figura 1).

Urmărind datele precizate în figura 1, constatăm că:

$$N = q^{-D} \quad (3)$$

astfel încât dimensiunea formelor se determină după relația:

$$D = \frac{\log N(q)}{\log \frac{1}{q}} \quad (4)$$

Aplicând această relație unei structuri autosimilare, se poate găsi o valoare chiar și neîntregă pentru D , ca valoare a limitei:

$$D = \lim_{q \rightarrow 0} \frac{\log N(q)}{\log \frac{1}{q}} \quad (5)$$

Relația (5) este de nivel calitativ, ea putând fi folosită doar în unii algoritmi numerici. Mult mai utilizată în practică este relația (diagrama) Mandelbrot-Richardson, dedusă ca și consecință a efectului Richardson.

Lewis Fry Richardson a pus pentru prima dată problema unei relații între lungimea granițelor naționale și scala de măsură. El a constatat că această relație este una de tip *log-log* (reprezentabilă printr-un grafic ce are pe abscisă logaritmul scalei iar pe ordonată logaritmul lungimii conturului ca funcție de scală).

Mandelbrot a asociat termenul $1-D$ cu panta graficului, astfel încât funcția devine:

$$\log L(s) = (1-D) \log(s) + k \quad (6)$$

unde D este dimensiunea fractală, s notează scala de raportare, $L(s)$ reprezintă lungimea conturului frontierei sau

coastei (corespunzătoare scării) iar k este o constantă pozitivă ce ține de magnitudinea absolută a lungimii conturului considerat.

Într-adevăr, plecând de la relația (4) și considerând în mod natural $s = q$, $N(q) = \frac{L(s)}{s}$, obținem:

$$D = 1 + \frac{\log L(s)}{\log \frac{1}{s}} \quad (7)$$

de unde:

$$\log L(s) = (D-1) \log \frac{1}{s} = (1-D) \log s \quad (8)$$

ceea ce justifică asocierea făcută de Mandelbrot.

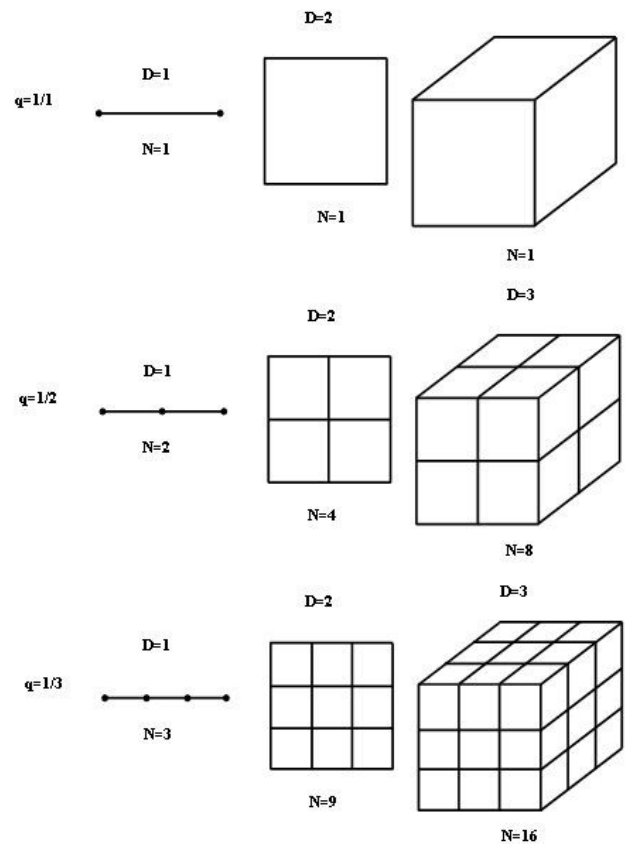


Fig. 1. Definirea dimensiunii topologice euclidiene .

Pentru coasta Marii Britanii, Richardson a găsit: $1-D = -0.24$, deci $D = 1.24$, adică o valoare fracționară. Linia de coastă a Africii de Sud s-a dovedit mult mai netedă, aproape de un arc de cerc. Panta estimată pentru diagrama Mandelbrot-Richardson este foarte aproape de zero, astfel încât avem: $D \approx 1$. Se dovedește astfel că acest contur deține caracteristicile unei forme geometrice euclidiene, așa cum era de așteptat.

III. ANALIZA DIMENSIUNII GENERALIZATE

Va fi făcută în continuare o analiză calitativă a interpretării unui nou tip de dimensiune geometrică, diferită de cea topologică euclidiană. Ea va fi numită dimensiune generalizată, urmând a-i studia ulterior proprietățile. În scopul

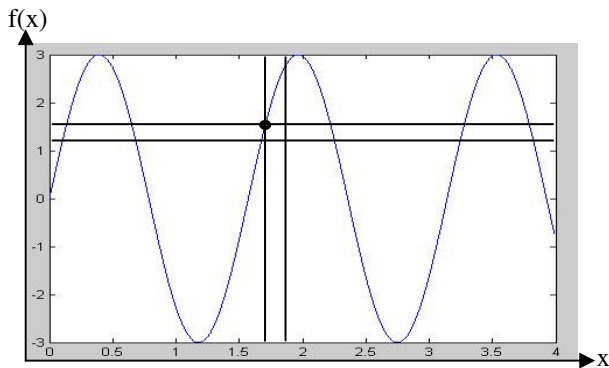


Fig. 2. Definierea matricei de acoperire.

identificării unor corelații între dimensiunea generalizată și dimensiunea fractală, se poate pune problema studierii relațiilor existente între cele două noțiuni.

Fie o curbă continuă, netedă, ca cea din figura 2.

În această figură axa Ox este axa argumentului x iar axa Oy este axa funcției $y = f(x)$. În cazul particular al exemplului prezentat funcția este de forma $f(x) = 3 \sin(4x)$. Fereastra de afișare a fost autodimensionată.

Este evident că numărul maxim posibil de puncte de caroiaj care să dețină proprietatea de a se găsi pe grafic, este N^2 , unde N este numărul de reticule după fiecare din axe. Nu toate aceste puncte, însă, vor realiza în mod practic această proprietate, fapt care face ca acest număr să fie $n \cdot N$, cu n medie a numărului de noduri dispuse pe fiecare axă de caroiaj orizontal și simultan pe grafic. Vom defini nodurile în care proprietatea specificată este satisfăcută ca fiind *noduri active*, în timp ce nodurile pentru care ea nu este realizată le vom denumi *noduri pasive*. Punctele de intersecție cu graficul care nu se găsesc pe matricea de acoperire, se ignoră (sunt eliminate din algoritmul de determinare a dimensiunii generalizate). În exemplul de mai sus avem trei noduri pasive și doar unul activ.

Vom considera că ponderea valorii lui n față de N poate varia între 0 și 1, aceste limite extreme semnificând, din punct de vedere formal, realizarea funcției *total sau nimic*. Altfel spus, n poate lua valori cuprinse între 0 și N . Dacă odată cu modificarea valorii lui N această caracteristică se menține, rezultă că ea este o specificitate a curbei considerate. Se poate astfel trece la determinarea dimensiunii generalizate ca indice de specificitate. Se observă că raportul $\frac{n}{N}$ indică un

factor de umplere (sau *factor de acoperire*) cu noduri active (noduri situate pe grafic). Din acest motiv, metoda prin care vom defini dimensiunea generalizată în cele ce urmează, va fi denumită *metoda matricei de acoperire* (MMA).

Pentru definirea dimensiunii generalizate adoptăm următoarea formulă:

$$\frac{N}{n + N} = k^{1-D} \quad (1)$$

unde n și N sunt noțiuni discutate mai sus, k este o constantă arbitrară iar D notează dimensiunea generalizată.

Să observăm că, în scopul normării intervalului de variație a dimensiunii generalizate, trebuie făcută alegerea $k = 2$. Într-adevăr, logaritmand ambii membri din (1) și alegând baza logaritmului de valoare egală cu 2, obținem:

$$D = 1 + \log_2 \frac{n + N}{N} \quad (2)$$

Să analizăm relația 2. Pentru valori foarte mici ale lui n în raport cu N , adică pentru $n \rightarrow 0$, găsim $D \rightarrow 1$. Acest fapt sugerează că o curbă cu o astfel de caracteristică este o curbă ordinară, euclidiană. Când însă $n \rightarrow N$, umplerea domeniului $N \times N$ definit mai sus tinde să fie completă iar relația (2) conduce la $D \rightarrow 2$, indicând faptul că acum curba devine una specială, tinzând către caracteristicile unei suprafețe. În concluzie, domeniul de variație a dimensiunii generalizate este $\Omega = [1, 2]$, același cu domeniul de variație al dimensiunii fractale corespunzătoare.

În scopul adaptării necesităților de calcul la facilitățile oferite de diversele medii de programare, vom aduce relația (2) la forma:

$$D = 1 + \frac{\ln \frac{n + N}{N}}{\ln 2} \quad (3)$$

unde \ln notează funcția logaritm natural.

Se constată că $n \in [0, N]$, astfel încât următoarea relație capătă sens:

$$D = 1 + \frac{\ln(\zeta + 1)}{\ln 2} \quad (4)$$

cu $\zeta = n/N$, $x \in [0, 1]$. Vom numi variabila ζ *factor de acoperire* și vom face ulterior referiri la ea în consecință.

Se observă că intervalul de valori posibile ale dimensiunii generalizate este $\Delta = [1, 2]$, așa cum s-a dorit.

Expresia (4) poate fi adusă la forma:

$$D = 1 - S \quad (5)$$

unde $S = -\frac{\ln(\zeta + 1)}{\ln 2}$ notează *panta caracteristică* a metodei matricei de acoperire.

Pe de altă parte, considerând metoda divizării în determinarea dimensiunii generalizate:

$$L(r) = r^{1-D} \quad (6)$$

cu L notând lungimea curbei approximate, r - lungimea pasului și D - dimensiunea generalizată, avem:

$$1-D = \frac{\ln L}{\ln r} = \ln \frac{N}{n+N} = S \quad (7)$$

Și în acest caz, dimensiunea generalizată poate fi scrisă funcție de panta caracteristică:

$$D = 1 - S \quad (8)$$

Se observă că în timp ce valoarea lui r în metoda divizării este constantă pe parcursul unei iterații, în cazul metodei matricei de acoperire această valoare este o medie de forma:

$$r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \quad (9)$$

cu ρ_i pasul de la nodul i la nodul $i+1$.

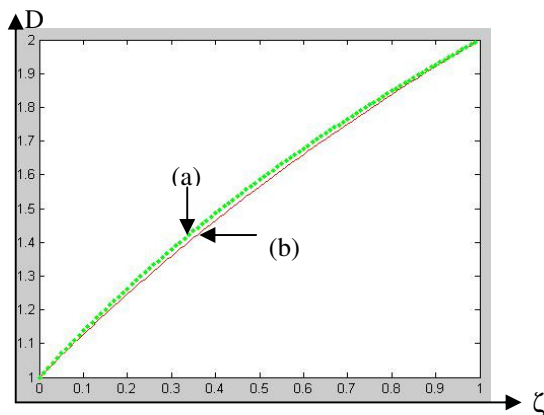


Fig. 3. Variația dimensiunii generalizate în raport cu factorul de acoperire. (a) metoda MA (b) metoda mixtă

Conform relației 7 și ținând cont de notația făcută în relația 4, avem:

$$S = \ln \frac{1}{\zeta + 1} \quad (10)$$

Cum panta S este negativă, cuprinsă între 0 și $-\ln 2 \approx -0.69$, dimensiunea generalizată poate căpăta valori în intervalul $[0, 1-S]$. Pentru a se asigura același domeniu de apartenență a dimensiunii generalizate ca în cazul metodei matricei de acoperire, va trebui realizată o renormare:

$$D = (1 - S)^\mu \quad (11)$$

Cum pentru $S = 0$ valoarea coeficientului μ poate fi oricât, acesta se va evalua pentru cazul $S = -\ln 2$. Rezultă:

$$\mu = \frac{\ln 2}{\ln(1 + \ln 2)} \approx 1.33 \quad (12)$$

IV. CONCLUZII

Relațiile (4) și (11) reprezintă formulele de calcul a dimensiunii generalizate în metoda matricei de acoperire (MMA) respectiv în metoda mixtă (MM). O analiză a acestor relații poate semnala o serie de caracteristici specifice și poate sugera unele strategii de utilizare a celor două metode în aplicațiile practice.

Conform figurii 3, se constată că abaterea între trasa definită de evoluția dimensiunii generalizate în cazul metodei divizării (curba punctată) și cea specifică metodei mixte (curba continuă), este mică (sub 1%). În consecință, cele două metode pot fi considerate congruente, considerentele practice ducând la preferarea uneia sau alteia în utilizare.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Hambly, B.M., Jones, O.D., *Thick and thin points for random recursive fractals*, oai:eprints.soton.ac.uk:29687, 2003.
- [2] Restrepo, J.G., Ott, E., Hunt, B.R., *Spatial patterns of desynchronization bursts in networks*, arXiv:nlin.CD/0401007 v1 7 Jan 2004.
- [3] Mosekilde, E., Maistrenko, Y., and Postnov, D., *Chaotic Synchronization: Applications to Living Systems*, World Scientific, Singapore, 2002.
- [4] Baish, J.W., and Jain, R.K., *Fractals and Cancer*, Cancer Research 60, 3683-3688, July 15, 2000.